

Quiz #2

Επιστημονικός Υπολογισμός -Άνοιξη 2010

Ημερομηνία Παράδοσης Πέμπτη, 29 Απριλίου 2010

Ονοματεπώνυμο: Νίκος Ιωαννίδης

ΑΜ: 690

Μέθοδος διχοτόμησης

1) (D)

Αν $f(x)$ συνεχής στο $[a,b]$ και $f(a)f(b)<0$ τότε λόγω Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $[a,b]$.

2) (C)

1. $\alpha := a$, $\beta := b$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$
2. $\gamma = (\alpha+\beta)/2$, $f(\gamma)$
3. if $f(\alpha)*f(\gamma)>0 \rightarrow \alpha:=\gamma$
4. if $f(\beta)*f(\gamma)>0 \rightarrow \beta:=\gamma$
5. if $\beta-\alpha>\epsilon \rightarrow$ βήμα 2.

Επανάληψη	α	$f(\alpha)$	β	$f(\beta)$	γ	$f(\gamma)$
1	1	0.067	5	-0.266	3	-0.150
<u>2</u>	1	0.067	3	-0.0150	2	←

3) (D)

4) (C)

Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι παντού μη αρνητική και έτσι δεν μπορεί να ικανοποιηθεί το αίτημα $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$ για δυο τυχαία a, b .

Newton-Raphson Μέθοδος

5) (C)

Έστω ότι έχω την εξίσωση $x^2 - R = 0$ τότε βάση της μεθόδου Newton-Raphson η εύρεση της τετραγωνικής ρίζας θα προκύπτει από την αντικατάσταση για $f(x) = x^2 - R$ και $f'(x) = 2x$ στον ακόλουθο τύπο:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - R}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + R}{2x_n} = \frac{x_n^2 + R}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{R}{x_n} \right)$$

6) (C)

Έχω $x^2 - 4 = 0$ άρα $f(x) = x^2 - 4$ και $f'(x) = 2x$ επομένως για $x_0 = 3$ έχω:

$$x_{n+1} = 3 - \frac{9 - 4}{6} = 2,167$$

7) (B)

Έχω $f(x) = 0$ και $f(3) = 5$, $f'(3) = \tan(57^\circ) = 1,54$ επομένως βάση της μεθόδου Newton-Raphson έχω $x_1 = 3 - \frac{5}{1,54} = 3 - 3,247 = -0.2470$

8)

Αλγόριθμος:

1. Όρισε x_0 , $n=0$

2. Υπολόγισε $f(x_n)$, $f'(x_n)$

3. Υπολόγισε $h := -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

4. $x_{n+1} = x_n + h$

5. $n = n+1$

6. αν $h > \varepsilon \rightarrow$ βήμα 2

Έστω έχω την εξίσωση $x^3 = 4$ επομένως : $f(x) = x^3 - 4$ και $f'(x) = 3x^2$ άρα βάση του αλγορίθμου έχω:

Για $x_0 = -2$:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	-2	-16	12	$x_1 = -0.67$
1	-0.67	-4.3	1.34	$x_2 = 2.53$
2	2.53	12.19	19.2	$x_3 = 1.89$
3	1.89	2.75	10.7	$x_4 = 1.63$
4	1.63	0.33	7.9	$x_5 = 1.588$

Για $x_0 = 0$:

Λόγω του ότι $f'(x_0) = 0$ δεν επιτρέπεται η διαίρεση και έτσι θεωρείται ακατάλληλη αρχική προσέγγιση.

Για $x_0 = 5$:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	5	121	75	$x_1 = 3.39$
1	3.39	34.96	34.48	$x_2 = 2.37$
2	2.37	9.31	16.85	$x_3 = 1.82$
3	1.82	2.02	9.94	$x_4 = 1.6$
4	1.6	0.096	7.68	$x_5 = 1.5875$

9) (B)

Μέθοδος της Τέμνουσας

10) (A)

Έστω ότι έχω την εξίσωση $x^2 - R = 0$ τότε βάση της μεθόδου της Τέμνουσας η εύρεση της τετραγωνικής ρίζας θα προκύπτει από την αντικατάσταση για $f(x) = x^2 - R$ στον ακόλουθο τύπο:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x_n - \frac{(x_n^2 - R) \cdot (x_n - x_{n-1})}{(x_n^2 - R) - (x_{n-1}^2 - R)} = x_n - \frac{(x_n^2 - R) \cdot (x_n - x_{n-1})}{(x_n^2 - x_{n-1}^2)} = \\&= x_n - \frac{(x_n^2 - R) \cdot (x_n - x_{n-1})}{(x_n + x_{n-1})(x_n - x_{n-1})} = x_n - \frac{x_n^2 - R}{x_n + x_{n-1}} = \frac{x_n^2 + x_n \cdot x_{n-1} - x_n^2 + R}{x_n + x_{n-1}} = \frac{x_n \cdot x_{n-1} + R}{x_n + x_{n-1}}\end{aligned}$$

11) (A)

Με βάση ότι $x_0 = 4$ και $x_1 = 3$ έχω: $x_2 = 3 - \frac{5}{\frac{5-19}{3-4}} = 3 - \frac{5}{7} = 2,2857$

12) (B)

Έχω $f(x) = 0$ και $f(3) = 5$, $f'(3) = \tan(57^\circ) = 1,54$ επομένως βάση της μεθόδου Τέμνουσας έχω $x_1 = 3 - \frac{5}{f'(3)} = 3 - \frac{5}{1,54} = 3 - 3.2470 = -0.2470$

13) (B)

Γιατί προφανώς μια αρχική προσέγγιση στη μέθοδο της τέμνουσας δεν θεωρείται κατάλληλη όταν παρουσιάζεται πρόβλημα στον παρονομαστή του κλάσματος $\frac{f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ γιατί θέλω να ισχύει $f(x_n) - f(x_{n-1}) \neq 0$.